

# Sadržaj

<b>I</b>	<b>Teorijske osnove</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>7</b>
1.1	Poreklo i upotreba termina "haos" . . . . .	9
1.2	Istorija razvoja haosa . . . . .	10
1.3	Haotično ponašanje . . . . .	12
1.4	Značaj nelinearnosti . . . . .	15
1.5	Dinamički pogled na svet . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Jednodimenzionalni sistemi</b>	<b>21</b>
2.1	Uvod . . . . .	21
2.2	Geometrijski pristup rešavanju . . . . .	21
2.3	Kvalitativna analiza diferencijalnih jednačina . . . . .	24
2.4	Fiksne tačke i stabilnost . . . . .	25
2.5	Kratak istorijat teorije stabilnosti . . . . .	25
2.6	Rast brojnosti populacije . . . . .	26
2.7	Linearna analiza stabilnosti . . . . .	28
2.8	Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja . . . . .	29
2.9	Nemogućnost oscilacija . . . . .	30
2.10	Potencijali . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Bifurkacije u jednodimenzionalnim sistemima</b>	<b>33</b>
3.1	Uvod . . . . .	33
3.2	Sedlo-čvor bifurkacija . . . . .	34
3.3	Transkritična bifurkacija . . . . .	36
3.4	Vilasta bifurkacija . . . . .	37
3.5	Kretanje perle po rotirajućem obruču . . . . .	41

3.6	”Nesavršene” bifurkacije i katastrofe . . . . .	48
3.7	Naježda insekata . . . . .	52
3.7.1	Analiza fiksnih tačaka . . . . .	53
3.7.2	Određivanje bifurkacionih krivih . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Jednodimenzionalni sistemi na kružnici</b>	<b>57</b>
4.1	Uvod . . . . .	57
4.2	Uniformni oscilator . . . . .	58
4.3	Neuniformni oscilator . . . . .	59
4.3.1	Period oscilovanja . . . . .	61
4.3.2	”Duhovi” i ”uska grla” . . . . .	62
4.4	Klatno u otpornoj sredini . . . . .	64
4.5	Svetlucanje svitaca . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Dvodimenzionalni linearni sistemi</b>	<b>69</b>
5.1	Definicije i primeri . . . . .	69
5.1.1	Fizička interpretacija . . . . .	71
5.1.2	Definicija stabilnosti . . . . .	72
5.2	Klasifikacija linearnih sistema . . . . .	73
5.2.1	Klasifikacija fiksnih tačaka . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Nelinearni sistemi u ravni</b>	<b>81</b>
6.1	Fazni portret . . . . .	81
6.2	Egzistencija i jedinstvenost rešenja . . . . .	83
6.3	Fiksne tačke i linearizacija . . . . .	84
6.3.1	Linearizovani sistem . . . . .	84
6.3.2	Klasifikacija fiksnih tačka . . . . .	85
6.4	Lotka-Voltera model . . . . .	87
6.5	Konzervativni sistemi . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Granični ciklus</b>	<b>95</b>
7.1	Uvod . . . . .	95
7.1.1	Odbacivanje mogućnosti pojave zatvorene orbite . . . . .	98
7.2	Poenkare-Bendiksonova teorema . . . . .	100
7.3	Relaksacione oscilacije . . . . .	103
7.4	Slabo nelinearni oscilatori . . . . .	105
<b>8</b>	<b>Bifurkacije u višedimenzionalnim sistemima</b>	<b>115</b>
8.1	Uvod . . . . .	115
8.2	Transkritične i vilaste bifurkacije . . . . .	119

8.3	Hopfove bifurkacije . . . . .	120
8.3.1	Natkritična Hopfova bifurkacija . . . . .	120
8.3.2	Potkritična Hopfova bifurkacija . . . . .	122
8.4	Oscilujuća hemijska reakcija . . . . .	125
8.5	Globalne bifurkacije ciklusa . . . . .	129
8.5.1	Bifurkacije sa beskonačnim periodom . . . . .	130
8.5.2	Homoklinička bifurkacija . . . . .	131
8.6	Spregnuti oscilatori i kvaziperiodičnost . . . . .	133
8.6.1	Spregnuti sistemi . . . . .	135
8.7	Poenkareova preslikavanja . . . . .	137
<b>9</b>	<b>Lorencove jednačine</b>	<b>143</b>
9.1	Uvod . . . . .	143
9.2	"Haotični" vodenični točak . . . . .	144
9.2.1	Zakon održanja mase . . . . .	147
9.2.2	Zakon promene momenta količine kretanja . . . . .	149
9.2.3	Amplitudne jednačine . . . . .	150
9.2.4	Fiksne tačke sistema . . . . .	151
9.3	Neka svojstva Lorencovih jednačina . . . . .	152
9.3.1	Fiksne tačke Lorencovog sistema . . . . .	154
9.3.2	Linearna stabilnost koordinantog početka . . . . .	155
9.3.3	Stabilnost fiksnih tačaka sistema $C^+$ i $C^-$ . . . . .	156
9.4	Haos na stranom atraktoru . . . . .	158
9.4.1	Ljapunovljev eksponent . . . . .	160
9.4.2	Kolmogorovljeva ( $K$ ) entropija . . . . .	162
9.4.3	Definisanje haosa . . . . .	163
9.4.4	Definisanje atraktora i stranog atraktora . . . . .	163
9.5	Istraživanje parametarskog prostora . . . . .	167
9.6	Upotreba haosa za slanje tajnih poruka . . . . .	169
9.6.1	Eksperiment . . . . .	169
9.6.2	Dokaz sinhronizacije . . . . .	171
<b>10</b>	<b>Jednodimenzionalna preslikavanja</b>	<b>175</b>
10.1	Uvod . . . . .	175
10.2	Fiksne tačke i paukove mreže . . . . .	176
10.2.1	Paukove mreže za jednodimenzionalna preslikavanja . . . . .	177
10.3	Numerički pristup logističkom preslikavanju . . . . .	177
10.4	Periodični prozori . . . . .	181
10.4.1	Intermitentnost . . . . .	183
10.5	Ljapunovljevi eksponenti . . . . .	185

10.6	Univerzalnost i eksperimenti . . . . .	186
10.6.1	Kvalitativna univerzalnost: $U$ -niz . . . . .	187
10.6.2	Kvantitativna univerzalnost . . . . .	188
10.6.3	Reslerov sistem . . . . .	189
10.7	Renormalizacija . . . . .	190
10.7.1	Renormalizacija za "pešake" . . . . .	194
<b>11</b>	<b>Fraktali</b>	<b>197</b>
11.1	Uvod . . . . .	197
11.2	Kantorov skup . . . . .	199
11.2.1	Kantorova funkcija . . . . .	200
11.3	Pojam dimenzije i fraktalne dimenzije . . . . .	202
11.3.1	Konstrukcija Mengerovog sundera . . . . .	204
11.3.2	Konstrukcija trougla Sierpinskog . . . . .	205
11.3.3	Zmajolika kriva . . . . .	205
11.3.4	Opštiji Kantorovi skupovi . . . . .	207
11.4	Dimenzija objekta . . . . .	207
11.4.1	Tačkaste i korelacione dimenzije . . . . .	208
11.5	Multifraktali . . . . .	210
11.6	Slučajni fraktali . . . . .	213
<b>12</b>	<b>Strani atraktori</b>	<b>215</b>
12.1	Uvod . . . . .	215
12.1.1	Značaj disipacije . . . . .	217
12.2	Enoovo preslikavanje . . . . .	218
12.2.1	Biranje parametara . . . . .	220
12.3	Reslerov sistem . . . . .	222
12.4	Bistabilnost magnetno-elastičnog mehaničkog sistema . . . . .	226
12.5	Oscilator sa "dve jame" pod dejstvom prinudne sile . . . . .	227
12.5.1	Tranzijentni kaos . . . . .	229
<b>II</b>	<b>Primena</b>	<b>231</b>
<b>13</b>	<b>Modelovanje saobraćajnog toka</b>	<b>233</b>
13.1	Uvod . . . . .	233
13.2	Osnovna i praktična pitanja . . . . .	235
13.2.1	Neka osnovna pitanja . . . . .	235
13.2.2	Neka praktična pitanja . . . . .	236
13.3	Klasifikacija modela saobraćajnog toka . . . . .	237

13.4 Makroskopski modeli . . . . .	237
13.5 Mikroskopski modeli . . . . .	237
13.5.1 Modeli sleđenja vozila . . . . .	238
13.5.2 Modeli ćelijskih automata (CA) . . . . .	238
13.5.3 Kinetičko teorijski modeli . . . . .	239
13.6 Mezoskopski modeli . . . . .	239
13.6.1 Eksperimentalno-empirijsko-numerički pristup . . . . .	239
13.7 Teorija drumskog saobraćaja zasnovana na dinamici fluida . .	240
13.8 Kinetička teorija u automobilskom saobraćaju . . . . .	240
13.8.1 Prigožinov model . . . . .	241
13.8.2 Teorija "praćenja vozila" . . . . .	241
13.8.3 "Rešetka modeli" drumskog saobraćaja . . . . .	247
13.8.4 Model Jukava-Kikuči . . . . .	248
13.8.5 Nagel-Šrekenbergov model ćelijskih automata, za saobraćajni tok na autoputu . . . . .	249
13.9 Saobraćajna gužva izazvana fluktuacijom u kretanju vodećeg vozila . . . . .	252
13.10Efekti vremenskog kašnjenja u modelima saobraćajnog toka .	254
13.10.1 Poreklo vremenskog kašnjenja u saobraćajnoj dinamici	254
13.11Koja je prava mera vremenskog kašnjenja u reakcijama vozača	257
13.12Modeli saobraćajnog toka sa uključenim vremenskim kašnjenjem	258
13.12.1 Čendlerov model . . . . .	258
13.12.2 Gazisovi modeli . . . . .	259
13.12.3 Modeli optimalne brzine . . . . .	259
13.13Kontrola saobraćaja na osnovi modela optimalne brzine . . .	260
13.13.1 Dejvisovi modeli . . . . .	261
13.14Model inteligentnog vozača i model ... . . . .	261
13.15Modeli praćenja više vozila . . . . .	262
13.16Pretpostavke i analiza matematičkih modela . . . . .	263
13.17Linearna analiza sa jednim kašnjenjem . . . . .	264
13.17.1 Slučaj kada se $N$ vozila kreću u kružnom toku . . . .	264
13.17.2 Slučaj $N = 2$ . . . . .	265
13.18Modeli sa više kašnjenja . . . . .	265
13.19Kašnjenja koja zavise od vremena . . . . .	266
13.20Unapređenje stabilnosti saobraćaja praćenjem više vozila . . .	266
13.21Zaključak . . . . .	267

<b>14 Nelinearni geodinamički procesi</b>	<b>269</b>
14.1 Zemljotresi . . . . .	270
14.1.1 Mehanizam nastanka zemljotresa . . . . .	271
14.1.2 Baridž-Knopof model . . . . .	274
14.1.3 Zakoni trenja zavisni od brzine i stanja . . . . .	279
14.1.4 Dinamika kretanja bloka u BK modelu . . . . .	283
14.1.5 Madariaga sistem . . . . .	288
14.1.6 Sistem Bekera . . . . .	294
14.2 Klizišta . . . . .	299
14.2.1 Nelinearni dinamički model . . . . .	303
14.2.2 Polinomijalni model . . . . .	310
14.2.3 Model katastrofe . . . . .	312
<b>15 Primena metoda teorije nelinearne dinamike</b>	<b>321</b>
15.1 Uvod . . . . .	321
15.2 Neuronski sistemi kao primer kompleksnih sistema . . . . .	322
15.3 Glavni elementi teorije sinhronizacije . . . . .	327
15.3.1 Sinhronizacija dva slabo kuplovana fazna oscilatora . . . . .	330
15.3.2 Sinhronizacija na populaciji globalno kuplovanih faznih oscilatora . . . . .	334
15.3.3 Pogled na sinhronizaciju haotičnih oscilatora . . . . .	337
15.3.4 Stabilnost kompletno sinhronizovanog stanja na kompleksnim mrežama . . . . .	339
15.4 Uloga i značaj sinhronizacije na neuronskim sistemima . . . . .	342
15.5 Fizičko modelovanje lokalne i kolektivne dinamike . . . . .	346
15.5.1 Fiziološka osnova dinamike neurona . . . . .	347
15.5.2 Modeli neurona iz ugla teorije nelinearne dinamike . . . . .	348
15.5.3 Šum i kašnjenje u interakcijama: poreklo i uloga u modelima dinamike neuronskih sistema . . . . .	353
15.5.4 Pojam ekscitabilnosti . . . . .	355
15.5.5 Klasifikacija ekscitabilnih sistema . . . . .	356
15.5.6 Ekscitabilnost i šum: pojava rezonantnih fenomena . . . . .	357
15.5.7 Fithugh-Nagumo model: primer ekscitabilne dinamike tipa II . . . . .	358
15.5.8 Dinamika populacije $FHN$ neurona pod dejstvom šuma i sinaptičkog kašnjenja: paradigma kolektivnog ponašanja makroskopskih neuronskih sistema . . . . .	362
15.5.9 Pojam stohastičke bifurkacije . . . . .	364
15.5.10 $MF$ pretpostavke i izvođenje $MF$ modela . . . . .	366

15.5.11 Spontano klasterovanje kao fenomen samoorganizacije u populaciji $FHN$ neurona pod dejstvom šuma i sinaptičkog kašnjenja . . . . .	370
<b>III Dodaci</b>	<b>373</b>
<b>16 Fazni portreti dvodimenzionalnih linearnih sistema</b>	<b>375</b>
16.1 Linearni sistemi drugog reda . . . . .	375
16.1.1 Konstrukcija rešenja linearnih sistema . . . . .	376
16.1.2 Normalna forma linearnih sistema . . . . .	381
16.1.3 Klasifikacija stacionarnih tačaka linearnih sistema . . .	385
<b>17 Definicije i dokazi teorema</b>	<b>393</b>
17.1 Dokaz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja . . . . .	393
17.2 Definicija invarijante . . . . .	398
17.3 Hartman-Grobmanova teorema . . . . .	399
17.4 Neki osnovni pojmovi iz topologije . . . . .	401
<b>18 Poznatiji haotični sistemi</b>	<b>403</b>
18.1 Neinvertibilna preslikavanja . . . . .	403
18.1.1 Logističko preslikavanje . . . . .	403
18.1.2 Sinusno preslikavanje . . . . .	403
18.1.3 "Šator" preslikavanje . . . . .	403
18.1.4 Linearni kongruentni generator . . . . .	404
18.1.5 Kubno preslikavanje . . . . .	404
18.1.6 Rikerov populacioni model . . . . .	404
18.1.7 Gausovo preslikavanje . . . . .	404
18.1.8 "Šiljato" preslikavanje . . . . .	404
18.1.9 Gausovo "belo" haotično preslikavanje . . . . .	405
18.1.10 Pinčersovo preslikavanje . . . . .	405
18.1.11 Spensovo preslikavanje . . . . .	405
18.1.12 "Sinusno-kružno" preslikavanje . . . . .	405
18.2 Disipativna preslikavanja . . . . .	405
18.2.1 Enoovo preslikavanje . . . . .	405
18.2.2 Lozievo preslikavanje . . . . .	406
18.2.3 Logističko preslikavanje sa kašnjenjem . . . . .	406
18.2.4 Zvonasto preslikavanje . . . . .	406
18.2.5 Burgersovo preslikavanje . . . . .	406
18.2.6 Holmsovo preslikavanje . . . . .	407

18.2.7	Kaplan-Jorkovo preslikavanje . . . . .	407
18.2.8	Disipativno standardno preslikavanje . . . . .	407
18.2.9	Ikedino preslikavanje . . . . .	407
18.2.10	Sinajevno preslikavanje . . . . .	408
18.2.11	Diskretno "predator-lovina" preslikavanje . . . . .	408
18.3	Konzervativna preslikavanja . . . . .	408
18.3.1	Čirikovljevo (standardno) preslikavanje . . . . .	408
18.3.2	Enoovo kvadratno preslikavanje koje očuvava oblast . . . . .	408
18.3.3	Arnoldovo preslikavanje . . . . .	409
18.3.4	Džindžerbredmanovo preslikavanje . . . . .	409
18.3.5	Haotično "mrežasto" preslikavanje . . . . .	409
18.3.6	Lorencovo 3-D haotično preslikavanje . . . . .	409
18.4	Disipativni tok pod dejstvom prinudne sile . . . . .	410
18.4.1	Klatno sa prigušenjem . . . . .	410
18.4.2	Van der Polov oscilator . . . . .	410
18.4.3	Šo-Van der Polov oscilator . . . . .	410
18.4.4	Prinudni Briselator . . . . .	410
18.4.5	Uedin oscilator . . . . .	411
18.4.6	Dafingov oscilator sa dve "jame" . . . . .	411
18.4.7	Dafing- Van der Polov oscilator . . . . .	411
18.4.8	Rejli-Dafingov oscilator . . . . .	411
18.5	Autonomni disipativni tok . . . . .	412
18.5.1	Lorencov atraktor . . . . .	412
18.5.2	Reslerov atraktor . . . . .	412
18.5.3	Lorencov atraktor bez difuzije . . . . .	412
18.5.4	Složeni leptir . . . . .	413
18.5.5	Čenov sistem . . . . .	413
18.5.6	Hedlijeva cirkulacija . . . . .	413
18.5.7	ACT atraktor . . . . .	414
18.5.8	Rabinovič-Fabrikant atraktor . . . . .	414
18.5.9	Linearni sistem za kretanje krutog tela, sa povratnom spregom . . . . .	414
18.5.10	Čuino kolo . . . . .	415
18.5.11	Mur-Špigelov oscilator . . . . .	415
18.5.12	Tomasov kružno-simetrični atraktor . . . . .	415
18.5.13	Halvorsenov kružno-simetrični atraktor . . . . .	416
18.5.14	Burk-Šoov atraktor . . . . .	416
18.5.15	Raklidžov atraktor . . . . .	416
18.5.16	VINDMI atraktor . . . . .	417



18.5.17	Najprostiji kvadratni haotični tok . . . . .	417
18.5.18	Najprostiji kubni haotični tok . . . . .	417
18.5.19	Najprostiji deo-po-deo linearni haotični tok . . . . .	418
18.5.20	”Dvostruko klizni” sistem . . . . .	418
18.6	Konzervativni tok . . . . .	418
18.6.1	Klatno pod dejstvom prinudne sile . . . . .	418
18.6.2	Najprostiji haotični tokovi sa prinudom . . . . .	419
18.6.3	Noze-Huverov oscilator . . . . .	419
18.6.4	”Lavirint” haos . . . . .	419
18.6.5	Eno-Heilesov sistem . . . . .	420
<b>19</b>	<b>Haotični sistemi necelog reda</b>	<b>421</b>
19.1	Uvod . . . . .	421
19.2	Definicija necelog izvoda . . . . .	422
19.3	Stabilnost rešenja nelinearnih sistema necelog reda . . . . .	423
19.4	Čuin sistem . . . . .	426
19.4.1	Tradicionalni Čuin oscilator . . . . .	426
19.4.2	Novi Čuin oscilator necelog reda . . . . .	428
19.5	Dafingov oscilator necelog reda . . . . .	429
19.6	Lorencov oscilator necelog reda . . . . .	430
19.7	Reslerov oscilator necelog reda . . . . .	431
<b>20</b>	<b>Spektralna analiza</b>	<b>433</b>
20.1	Uvod . . . . .	433
20.2	FT diskretnih signala i DFT . . . . .	436
20.2.1	Uvod . . . . .	436
20.2.2	Furijeova transformacija diskretnih signala . . . . .	438
20.2.3	Diskretna Furijeova transformacija . . . . .	441
<b>21</b>	<b>Neke približne metode rešavanja diferencijalnih jednačina prvog reda</b>	<b>449</b>
21.1	Metoda sukcesivnih aproksimacija . . . . .	449
21.2	Metoda neodređenih koeficijenata . . . . .	451
21.3	Analitička metoda . . . . .	452
21.4	Ojlerova metoda poligonalnih linija . . . . .	453
21.5	Metoda Runge-Kuta . . . . .	456
21.6	Adamsova metoda . . . . .	457
21.7	Milnova metoda . . . . .	458
21.8	Metoda Krilova . . . . .	459
21.9	Poboljšana Pikarova metoda . . . . .	460

<b>22 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova</b>	<b>463</b>
22.1 Funkcionalni redovi. Potencijalni redovi . . . . .	463
22.2 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova . . . . .	467
22.2.1 Korišćenje potencijalnog reda pri rešavanju diferencijalnih jednačina . . . . .	468
<b>23 Korisne matematičke formule</b>	<b>469</b>
23.1 Trigonometrijske relacije . . . . .	469
23.2 Hiperboličke funkcije . . . . .	469
23.3 Logaritmi . . . . .	470
23.4 Kompleksni brojevi . . . . .	470
23.5 Diferencijali . . . . .	471
23.6 Neodređeni integrali . . . . .	472
23.7 Aproksimacije . . . . .	473
23.8 Matrice i determinante . . . . .	473
23.9 Koreni polinoma . . . . .	474
23.9.1 Linearni sistemi . . . . .	474
23.9.2 Kvadratni polinom . . . . .	474
23.9.3 Polinom trećeg stepena . . . . .	474
23.9.4 Njutn-Rafsonov metod . . . . .	475
23.10 Vektorska analiza . . . . .	475
<b>IV Zadaci</b>	<b>477</b>
<b>24 Zadaci</b>	<b>479</b>
24.1 Zadaci iz poglavlja 2 . . . . .	479
24.2 Zadaci iz poglavlja 3 . . . . .	485
24.3 Zadaci iz poglavlja 4 . . . . .	491
24.4 Zadaci iz poglavlja 5 . . . . .	492
24.5 Zadaci iz poglavlja 6 . . . . .	499
24.6 Zadaci iz poglavlja 7 . . . . .	505
24.7 Zadaci iz poglavlja 8 . . . . .	513
24.8 Zadaci iz poglavlja 9 . . . . .	519
24.9 Zadaci iz poglavlja 10 . . . . .	521
24.10 Zadaci iz poglavlja 11 . . . . .	529
24.11 Zadaci iz poglavlja 12 . . . . .	532
<b>25 Beleške</b>	<b>537</b>

Literatura	543
26 Rečnik	565
Beleška o autorima	571
Registar pojmova	575

